

## Мощность

1. Перед тем, как начать разбираться с понятием реактивная мощность, разберём, что такое электрическая мощность вообще и какие составляющие в неё входят.

Перейдём к рассмотрению энергетических соотношений в цепи синусоидального тока.

### 1.1. Мгновенная мощность

Положим, что за элементарный промежуток времени  $dt$  через поперечное сечение провода в направлении принятом за положительное для тока  $I$  (рис.1.1), проходит электрический заряд  $dq$ .

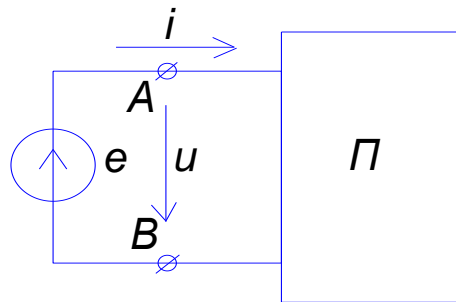


Рисунок 1.1

Перемещение заряда в положительном направлении э.д.с. источника сопровождается элементарной работой источника напряжения (э.д.с)

$$dA = edq \quad (1.1)$$

которая в виде электромагнитной энергии отдаётся источником во внешнюю цепь и затрачивается на работу по перемещению заряда  $dq$  в положительном направлении напряжения  $u$  через пассивный двухполюсник

$$dA = udq \quad (1.2)$$

Работа, совершаемая источником напряжения по переносу единичного заряда в данный момент времени характеризуется **мгновенной мощностью** производимой и отдаваемой источником напряжения и потребляемая двухполюсником. Она равна скорости совершения работы в данный момент времени.

$$p = dA / dt = ui \quad (1.3)$$

Напряжение и ток на входе пассивного двухполюсника в общем случае сдвинуты по фазе относительно друг друга на угол  $\phi$  и зависят от характера нагрузки (активной, реактивной).

Примем начальную фазу напряжения  $\psi_u=0$ , тогда следуя из определения, что под разностью фаз  $\phi$  напряжения и тока всегда понимается разность начальных фаз напряжения  $\psi_u$  и тока  $\psi_i$  (а не наоборот)

$$\phi = \psi_u - \psi_i \quad (1.4)$$

получим начальную фазу тока равную  $\psi_i = -\phi$

При таком условии мгновенные значения напряжения и тока:

$$u = U_m \times \sin \omega t \quad ; \quad i = I_m \times (\sin \omega t - \phi) \quad (1.5)$$

мгновенная мощность равна:

$$p = dA / dt = ui = U_m \times I_m \times \sin \omega t \times (\sin \omega t - \phi) = \frac{U_m \times I_m}{2} \times (\cos \phi - \cos(2\omega t - \phi)) = U \times I \times \cos \phi - U \times I \times \cos(2\omega t - \phi) \quad (1.6)$$

Мгновенная мощность имеет постоянную составляющую ( $U \times I \times \cos \phi$ ) и гармоническую составляющую ( $U \times I \times \cos(2\omega t - \phi)$ ), угловая частота которой в два раза больше угловой частоты напряжения и тока (рис. 1.2)

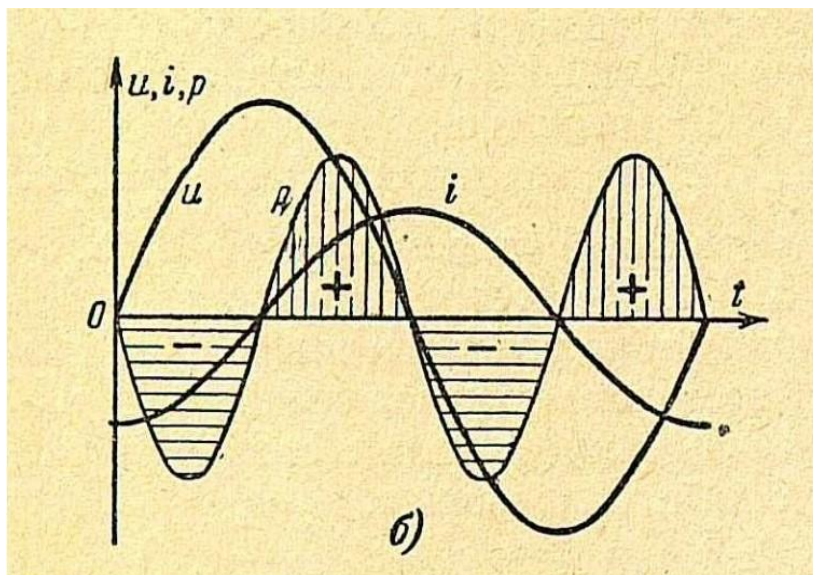


Рисунок 1.2

Мгновенная мощность равна нулю в те моменты времени, когда равны нулю  $u$  или  $i$ . Мгновенная мощность положительна, когда  $u$  и  $i$  одного знака, т.е. когда направления напряжения и тока в двухполюснике одинаковы и она отрицательна, когда  $u$  и  $i$  разных знаков, т.е. когда направление напряжения и тока в двухполюснике противоположны.

**Когда мгновенная мощность отрицательна, энергия поступает не в двухполюсник, а возвращается из двухполюсника источнику напряжения.**

Такой возврат энергии источнику питания происходит за счёт того, что энергия периодически запасается в магнитных и электрических полях элементов цепи, входящих в состав двухполюсника. Энергия отдаваемая источником и поступающая в двухполюсник в течении времени  $t$ , равна  $\int_0^t p dt$

На графике (рис.1.1.) она соответствует площади кривой, ограниченной кривой  $p$  осью абсцисс на интервале времени  $t$ . На рисунке знаками плюс и минус отмечены заштрихованные площадки, соответствующие энергии, поступающей в двухполюсник и возвращаемый источнику.

Если двухполюсник состоит только из активных сопротивлений, энергия накапливаться в нём не может. В этом случае нет сдвига фаз между напряжением и током ( $\phi = 0$ ). Ток и напряжение всегда одного знака,  $p \geq 0$  и нет таких моментов времени, когда энергия возвращалась бы из двухполюсника источнику питания (Рис. 1.3).

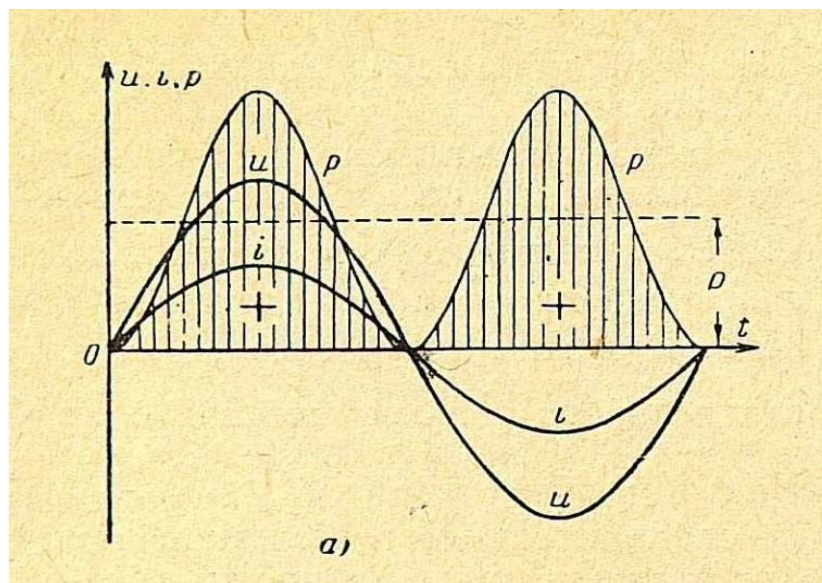


Рисунок 1.3

## 1.2. Активная мощность.

Среднее значение мгновенной мощности за период называется *активной мощностью* или иногда просто мощностью.

Активная мощность, потребляемая двухполюсником, не может быть отрицательной (иначе двухполюсник не потреблял бы энергию, а генерировал бы её), поэтому  $\cos\phi \geq 0$ .

Активная мощность физически представляет собой энергию, которая выделяется в единицу времени в виде теплоты на участке цепи в сопротивлении  $R$ .

Если  $u = U_m \times \sin \omega t$ ;  $i = I_m \times (\sin \omega t - \phi)$  или

$u = U_m \times (\sin \omega t + \phi)$ ;  $i = I_m \times \sin \omega t$  то

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T I_m U_m \sin \omega t (\sin \omega t + \phi) dt = \frac{I_m \times U_m}{2} \times \cos \phi \quad (1.7)$$

Предполагается, что в 1 секунду укладывается целое число периодов  $T$ . Действительно, произведение  $U \cos \phi = IR$ . Следовательно

$$P = U \times \cos \phi \times I = I^2 R \quad (1.8)$$

Единица активной мощности – ватт (Вт)

## 1.3. Полная мощность

Электрические машины и аппараты конструируют для работы при определённых значениях напряжения и тока. Поэтому их характеризуют не активной мощностью, зависящей от сдвига фаз  $\phi$  между напряжением и током, а **полной мощностью** представляющей собой произведением действующего значения напряжения и тока.

$$S = U \times I \quad (1.9)$$

Очевидно, что полная мощность равна наибольшему значению активной мощности, которую можно получить при, заданных напряжении и токе. **Здесь амплитуда гармонических составляющих мгновенной мощности численно равна полной мощности.**

Размерность полной и активной мощностей одинаковая, однако единицу измерения мощности в применении к полной мощности называют - вольт- ампер (*ва*)

Это позволяет при численном выражении полной мощности кратко говорить мощность столько - то вольт- ампер, так как наименование единицы ( вольт- ампер) сразу же указывает, что речь идёт о полной мощности.

Отношение активной мощности к полной, равное косинусу угла сдвига фаз между напряжением и током, называется *коэффициентом мощности*:

$$\frac{P}{S} = U \times I \times \cos\phi / U \times I = \cos\phi \quad (1.10)$$

*Для лучшего использования электрических машин и аппаратов желательно иметь возможно больший коэффициент мощности или возможно меньший сдвиг по фазе тока относительно напряжения, т.е.*

Так, например для питания приёмника мощностью 10 000 *квт* при  $\cos\phi=0,7$  источник питания должен быть рассчитан на мощность 14 300 *кВа* , а при  $\cos\phi=1$  на 10 000 *кВа*.

*Высокий коэффициент мощности желателен также для уменьшения потерь при передаче энергии по линиям электропередач. При данной активной мощности  $P$  приёмника ток в линии тем меньше , чем больше значение  $\cos\phi$ :*

$$I = P / U \times \cos\phi: \quad (1.11)$$

Графически связь между активной, полной мощностью и коэффициентом мощности можно выразить в виде прямоугольного треугольника (Рис.1.4) – треугольника мощности с катетами  $P, Q$  и гипотенузой  $S$ . Данный треугольник , стороны которого в произвольно выбранном масштабе равны мощностям  $S, P, Q$  называется- треугольником мощностей

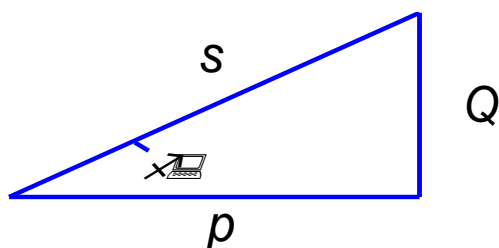


Рисунок 1.4

Из рисунка 1.4. видна зависимость и связь противолежащего катета обозначенного, как  $Q$  от угла  $\phi$  характеризующего коэффициент мощности нагрузки.

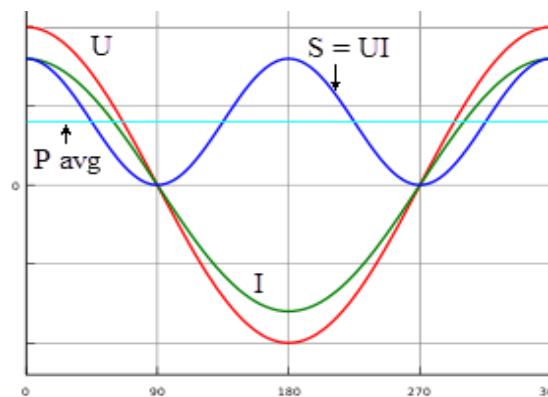
Величину  $Q$  принято называть **реактивной мощностью**

Активная, реактивная и полная мощности связаны соотношениями:

$$S^2 = P^2 + Q^2; \quad S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (1.12)$$

1.3.1. Рассмотрим на графиках энергетические соотношения мощностей, при различного рода нагрузок в электрической цепи.

а) При отсутствии реактивных элементов и сдвига фаз в нагрузках, мгновенная мощность в полупериоде  $U_m \times I_m$  будет максимальной, и в следующем полупериоде произведение отрицательного напряжения с отрицательным током дадут положительный результат – полезную мощность в нагрузке (Рис. 1.5)



$$\varphi = 0^\circ \quad \sin 90^\circ = 0 \quad \cos 90^\circ = 1$$

Рисунок 1.5

В этом случае:

Реактивная мощность  $Q = UI \sin 0 = 0$

Потребляемая мощность  $P = UI \cos 0 = UI$

Полная мощность  $S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$  будет равна потребляемой мощности

Коэффициент мощности  $P/S = 1$

б) При наличии реактивной нагрузки (на графике индуктивная нагрузка) появляется сдвиг фаз между напряжением и током на угол  $\phi = 90^\circ$  (Рис.1.6)

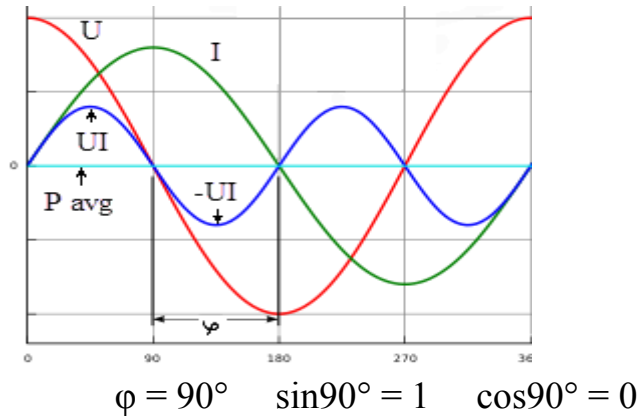


Рисунок 1.6

При отсутствии активной составляющей в нагрузке, сдвиг фаз между напряжением и током составит  $90^\circ$ .

В начале периода, когда напряжение максимально – ток будет равен нулю, следовательно, мгновенное значение мощности  $UI$  в это время будет равно нулю. В течении первой четверти периода, мощность можно видеть на графике, как произведение  $UI$ , которое станет равным нулю при максимуме тока и нулевом значении напряжения.

В следующую четверть периода на графике  $UI$  принимает отрицательное значение, следовательно, мощность возвращается обратно в источник питания. То же самое произойдет и в отрицательном полупериоде тока. В результате средняя (активная) потребляемая мощность  $P_{avg}$  за период будет равна нулю.

В таком случае:

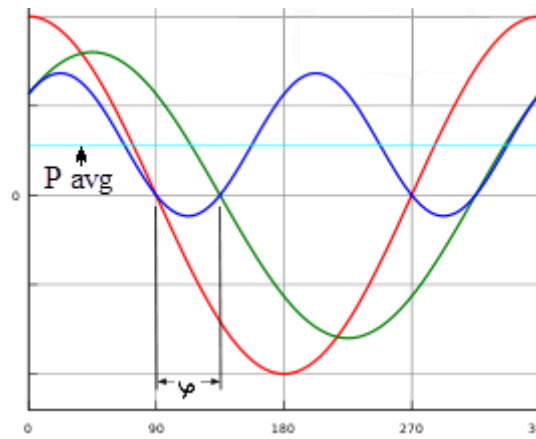
Реактивная мощность  $Q = UI \sin 90^\circ = UI$

Потребляемая мощность  $P = UI \cos 90^\circ = 0$

Полная мощность  $S = UI = \sqrt{(P^2 + Q^2)}$  будет равна реактивной мощности

Коэффициент мощности  $P/S = 0$

в) Ниже представлен рисунок графиков со сдвигом фаз  $45^\circ$ , для случая равенства активного и реактивного сопротивлений в нагрузке (Рис. 1.7)



$$\varphi = 45^\circ \quad \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \sqrt{2}/2 \approx 0.71$$

Рисунок 1.7

Здесь:

$$\text{Реактивная мощность } Q = UI \sin 45^\circ = 0.71 UI$$

$$\text{Потребляемая мощность } P = UI \cos 45^\circ = 0.71 UI$$

$$\text{Полная мощность } S = \sqrt{(P^2 + Q^2)} = UI$$

$$\text{Коэффициент мощности } P/S = 0.71$$

:  
**Отсюда видно, что для увеличения коэффициента мощности  $\cos \varphi$  нагрузки нужно очевидно, уменьшать её реактивную мощность**

Единица мощности - В×А

*На щитке любого источника электрической энергии переменного тока (генератора, трансформатора и т.д.) указывается значение  $S$  характеризующее ту мощность, которую этот источник может отдать потребителю, если последний работает при  $\cos \varphi = 1$  (т.е. если потребитель представляет собой чисто активное сопротивление).*

#### **1.4. Реактивная мощность**

*В то время как активная мощность определяет (в среднем) совершаемую работу или передаваемую энергию в единицу времени, полная и реактивная мощности не определяют ни совершаемой работы, ни передаваемой энергии в единицу времени. Однако по аналогии с понятием активной мощности в электроэнергетике реактивной мощности приписывают аналогичный смысл, а именно рассматривают как мощность генерирования, потребления или передачи некоторой условной величины, которую называют реактивной энергией:*



$$W_p = Qt \quad (1.13)$$

Размерность реактивной энергии  $W_p$  одинакова с размерностью энергии, но единицу измерения реактивной энергии называют:

вольт- ампер-час (*вар×ч*)

При расчётах электрических цепей, для расчёта полной мощности с учётом приведённого на рисунке 1.4 треугольника мощностей применяется **реактивная мощность**.

**Под реактивной мощностью  $Q$**  понимают произведение напряжения  $U$  на участке цепи на ток  $I$  по этому участку и на синус угла  $\phi$  между напряжением  $U$  и током  $I$ :

$$Q = U \times I \times \sin \phi \quad (1.14)$$

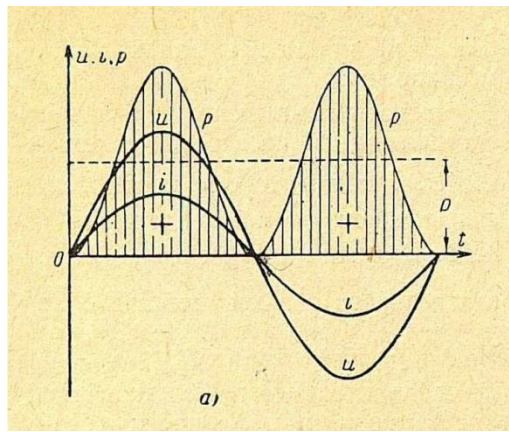
Если  $\sin \phi > 0$ , то  $Q > 0$ , если  $\sin \phi < 0$ , то  $Q < 0$

## 2.1. Физический смысл реактивной мощности

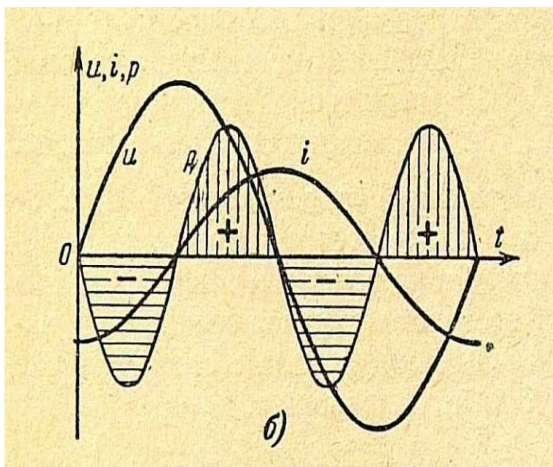
Из рассмотренного материала в первом разделе видно, что источник электрической энергии вырабатывает только активную мощность. Реактивной мощности при выработке электрической энергии у источника, не подключённого к нагрузке либо работающего чисто на активную нагрузку нет. Её активная мощность равна полной мощности.

Реактивная мощность появляется в электрической цепи при появлении сдвига фаз, между напряжением  $U$  и током  $I$  на угол  $\phi$

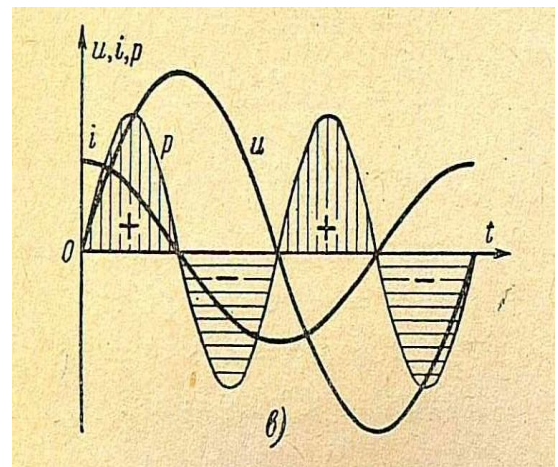
Сдвиг фаз между напряжением  $U$  и током  $I$  на угол  $\phi$  происходит при появлении в электрической цепи реактивной нагрузки (индуктивной  $L$  либо ёмкостной  $C$ ). На рисунках 2.1 изображены графики показывающие связь между соотношениями начальных фаз напряжения  $U$  и тока  $I$  и полной мощностью при активном, индуктивном и ёмкостном сопротивлении в электрической цепи.



а). Активная нагрузка



б) Индуктивная нагрузка



в) Ёмкостная нагрузка

Рисунок 2.1

Рассмотрим, что физически представляет собой реактивная мощность. С этой целью возьмём участок цепи состоящего из генератора электрической энергии с последовательно соединёнными нагрузками, имеющими  $R$ ,  $L$  и  $C$ . (Рис.2.2)

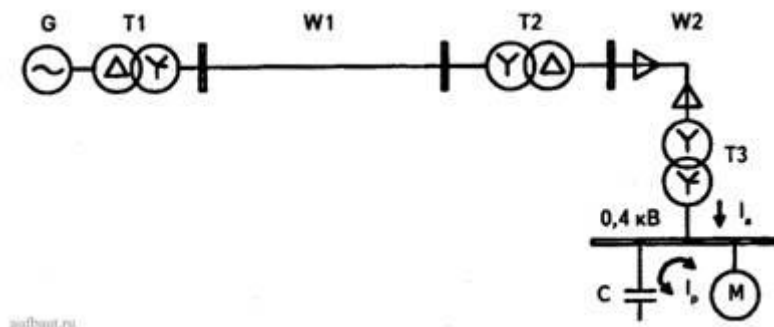


Рисунок 2.2

Пусть по нему протекает ток  $i = I_m \times \sin \omega t$ . Ток, протекая по участку цепи, создаёт переменное электромагнитное поле, которое состоит из изменяющихся во времени и взаимно обуславливающих друг друга электрического и магнитного полей, обладающих энергией электрического и магнитного полей.

Электромагнитное поле оказывает силовое воздействие на электрические заряды, в результате направленного движения которых и протекает наш ток. Силовое воздействие на заряды напрямую зависит от характера сопротивления в цепи нагрузки (активной, реактивной либо комплексной) и описывается уравнениями Максвелла и теоремой Умова-Пойнтинга.

Рассмотрим, чему будет равно мгновенное значение суммы энергий электромагнитного поля:

$$W_{MЭ} = W_M + W_Э = Li^2 / 2 + Cu^2_c / 2 = LI^2_m / 2 \times \sin^2 \omega t + CI^2_m / 2 (\omega C)^2 \times \cos^2 \omega t =$$

$$= LI^2 / 2 \times (1 - \cos 2\omega t) + I^2 / 2 \omega^2 C \times (1 + \cos 2\omega t) \quad (2.1)$$

Из полученного выражения видно, что  $W_{MЭ}$  имеет постоянную составляющую  $W_{MЭ0}$ , неизменную во времени, и переменную составляющую  $w_{MЭ}$ , изменяющуюся с двойной угловой частотой:

$$W_{MЭ} = W_{MЭ0} - w_{MЭ} \quad (2.2)$$

где

$$W_{MЭ0} = LI^2 / 2 + I^2 / 2 \omega^2 C \quad \text{и} \quad w_{MЭ} = (LI^2 / 2 + I^2 / 2 \omega^2 C) \cos 2\omega t$$

На создание постоянной составляющей  $W_{MЭ0}$  была затрачена энергия (активная мощность, имеющая положительное значение, показанное в энергетических соотношениях мощностей на рис. 2.1.) в процессе становления данного периодического режима. В дальнейшем при периодическом процессе энергия  $W_{MЭ0}$  остаётся неизменной и, следовательно, от источника питания не требуется энергия на её создание.

Из этого можно сделать вывод, что при сбалансированном распределении в цепи ёмкостной и индуктивной нагрузок, индуктивная нагрузка потребляет реактивную энергию, а ёмкостная нагрузка отдаёт запасённую реактивную энергию обратно в электрическую цепь. При этом средняя активная мощность источника активной энергии становится максимальной. Здесь:

$$S = P \quad \text{и коэффициент мощности } \frac{P}{S} = 1 \text{ (максимален)}$$

Если, же в цепи нагрузки, будет преобладать либо емкостная нагрузка, либо индуктивная, то выработанная реактивная энергия, дважды за период (с двойной угловой частотой, переменная составляющая  $w_{мэ}$  (2.2), будет отдаваться источнику активной мощности (энергии) и обратно поступать в источник реактивной энергии (мощности), а для поддержания постоянной составляющей  $W_{мэ0}$  от источника активной мощности (энергии), требуется дополнительная энергия, которую будет получать реактивная нагрузка в цепи один раз в период. (Рис.2.1, б, в, положительные значения активной мощности)

При этом источнику активной мощности, потребуется дополнительная мощность, для поддержания постоянной составляющей  $W_{мэ0}$  реактивной нагрузки.

Коэффициент мощности источника активной мощности будет зависеть от соотношения в цепи емкостной и индуктивной нагрузок.

## 2.2. Вывод

Из рассмотренных энергетических соотношений в цепи синусоидального тока мы видим:

- для работы двухполюсника (потребителя электрической энергии), требуется только положительное значение активной мощности  $P$  (мощности);

- максимальный коэффициент мощности источника электрической энергии, достигается при отсутствии в двухполюснике (потребителя электрической энергии) нагрузки создающей сдвиг фаз  $\phi$  между напряжением  $U$  и током  $I$ , либо, при сбалансированной индуктивной и емкостной нагрузок;

- при появлении в электрической цепи несбалансированной реактивной нагрузки, среднее значение активной мощности  $P$  уменьшается пропорционально увеличению сдвига фаз  $\phi$  напряжением  $U$  и током  $I$ ;

- когда значение активной мощности принимает отрицательное значение, энергия поступает не в двухполюсник (нагрузку), а возвращается из двухполюсника источнику активной энергии от реактивного источника энергии и обратно в нагрузку с двойной угловой частотой;

- отрицательное значение активной мощности не выполняет никакой полезной работы, а только снижает коэффициент мощности источника электрической энергии;

- в цепи синусоидального тока появляются гармонические составляющие мощности, которые влияют на качество передаваемой электрической энергии;

# Энергетические соотношения в электромагнитном поле. Теорема Пойнтинга

Наряду основных свойств электромагнитного поля стоит его энергия. Этот вопрос впервые был проанализирован Максвеллом, который выявил, что вся энергия поля, заключённого внутри объема  $V$ , сформировывается из энергии электрического поля

$$W_{\partial} = \int_V \frac{ED}{2} dV$$

и энергии магнитного поля

$$W_{\mathcal{M}} = \int_V \frac{HB}{2} dV$$

Подынтегральные выражения в выше изложенных формулах могут рассматриваться, таким образом, как плотности энергии электрического поля

$$W_{\partial} = ED / 2$$

и магнитного поля

$$W_{\mathcal{M}} = HB / 2$$

Также из их определений нередко вытекают в электротехнике известные формулы для запасенной в конденсаторе энергии:

$$W_c = CU^2 / 2$$

и в катушке индуктивности

$$W_L = LI^2 / 2$$

Вообще говоря, энергия электромагнитного поля, заключённого внутри объема  $V$ , не может быть постоянной.

Следует отнести к числу факторов, ниже описанные явления, которые определяют

изменение во времени энергии поля:

- обращение части энергии электромагнитного поля в энергию других типов, к примеру, в механическую энергию, связанную с тепловым движением частиц вещества, определённым протеканием токов проводимости;
- действия других источников, которые могут как уменьшать запас энергии поля, так и увеличивать его в зависимости от заданных условий;
- передача энергии между выделенным объемом, а также окружающими его областями пространства за счёт характерного процесса, свойственного электромагнитному полю и обладающему названием процесса излучения.

В электродинамике, как правило, принято характеризовать интенсивность процесса излучения, обуславливая особую векторную величину в каждой точке пространства, имеющую название вектора Пойнтинга  $\mathbf{P}$ .

Смысл вектора Пойнтинга в физике заключается в том, что его направление и модуль характеризуют размер и направленность в каждой точке пространства потока энергии излучения. Вектор Пойнтинга в системе единиц СИ имеет размерность

$$\text{Дж} / \text{с} \cdot \text{м}^2$$

то есть,

$$\text{Вт} / \text{м}^2$$

При этом безукоризненный спад энергии, заключенного внутри воображаемого объема  $V$  с поверхностью  $S$  электромагнитного поля, определенный излучением и отнесенный к единице времени, равна

$$\oint_S \mathbf{P} dS$$

В основе изложенного крайний интеграл должен быть рассмотрен как величина мгновенной мощности излучения, протекающего по направлению из анализируемого объема в окружающее пространство. Если же знак представленного интеграла отрицателен, то это объясняется тем, что поток энергии излучения устремлён не из объема  $V$ , а внутрь него. Согласно как с уравнениями Максвелла, так и с законом сохранения энергии, физически правильные результаты выявляются в том случае, если вектор Пойнтинга выразить через мгновенные значения полей

$$\mathbf{E}(t) \quad \text{и} \quad \mathbf{H}(t)$$

следующим образом:

$$\Pi = [EH]$$

В самом деле, по теореме Остроградского – Гаусса для рассматриваемой замкнутой поверхности  $S$  будем иметь

$$\oint_S \Pi dS = \int_V \operatorname{div} \Pi dV = \int_V (H \operatorname{rot} E - E \operatorname{rot} H) dV$$

Здесь было использовано известное тождество векторного анализа

$$\operatorname{div} [EH] = H \operatorname{rot} E - E \operatorname{rot} H$$

С учётом уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} H = \frac{\partial D}{\partial t} + \sigma E + J_{CT}$$

$$\operatorname{rot} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\oint_S \Pi dS = \int_V \operatorname{div} \Pi dV = \int_V (H \operatorname{rot} E - E \operatorname{rot} H) dV$$

приобретает следующий вид

$$\oint_S \Pi dS = -\sigma \int_V (EE) dV - \int_V (J_{CT} E) dV - \int_V \left( \frac{\partial D}{\partial t} E + \right.$$

Интеграл вида

$$P_{\text{пот}} = \sigma \int_V (EE) dV$$

может быть именован мгновенной мощностью потерь, будучи внутри объема  $V$  за счёт протекания токов проводимости. Иное слагаемое

$$P_{\text{стт}} = \int_{\nu} (J_{\text{ст}} E) dV$$

обуславливает мгновенную мощность, которая может либо отводиться из рассматриваемого объема сторонними токами, либо вноситься в него в зависимости от взаимной ориентации векторов  $\mathbf{J}_{\text{ст}}$  и  $\mathbf{E}$ . Можно сказать, используя электротехнические термины, что источники стороннего тока могут выступать как в образе нагрузок, так и в образе генераторов. Однако если допустить, что в соответствии с материальными уравнениями между векторами поля существует линейная связь

$$D = \varepsilon_{\alpha} E$$

$$B = \mu_{\alpha} H$$

то крайний интеграл в правой части формулы

$$\oint_S \Pi dS = -\sigma \int_{\nu} (EE) dV - \int_{\nu} (J_{\text{ст}} E) dV - \int_{\nu} \left( \frac{\partial D}{\partial t} E + \frac{\partial B}{\partial t} H \right) dV$$

обретёт вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\nu} \left( \frac{[ED]}{2} + \frac{HB}{2} \right) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nu} (\omega_{\partial} + \omega_{\text{м}}) dV$$

Тут мы приходим на основании вышеизложенного к интегральному соотношению вида

$$\oint_S \Pi dS = -P_{\text{пот}} - P_{\text{стт}} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\nu} (\omega_{\partial} + \omega_{\text{м}}) dV$$

приходящемуся математическим выражением теоремы Пойнтинга. Данная теорема определяет внутри произвольной области, в которой есть электромагнитное поле, факт баланса энергий. Вектор Пойнтинга для значимого в практическом отношении частного случая, в котором поле по гармоническому закону изменяется во времени, может быть выявлен через комплексные амплитуды полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , поскольку



$$E = \operatorname{Re} \left( \dot{E} e^{j\omega t} \right) = \frac{1}{2} \left( \dot{E} e^{j\omega t} + \dot{E}^* e^{-j\omega t} \right)$$

$$H = \operatorname{Re} \left( \dot{H} e^{j\omega t} \right) = \frac{1}{2} \left( \dot{H} e^{j\omega t} + \dot{H}^* e^{-j\omega t} \right)$$

где \* - комплексно-сопряжённые величины,

подставив их в формулу

$$\Pi = [EH]$$

получим

$$\Pi = \frac{1}{4} \left\{ [\dot{E}\dot{H}^*] + [\dot{E}^*\dot{H}] + [\dot{E}\dot{H}] e^{j2\omega t} + [\dot{E}^*\dot{H}^*] e^{-j2\omega t} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}\dot{H}^*] + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( [\dot{E}\dot{H}] e^{j2\omega t} \right)$$

Слагаемое первое, в части формулы справа, во времени неизменно, в отличие от второго слагаемого, которое изменяется во времени с удвоенной частотой.

Тем самым в электромагнитном поле, изменяющемся во времени по гармоническому закону, ход переноса энергии характеризуется, с одной стороны вещественным вектором, равным средней за период плотности мощности излучения,

$$\Pi_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T \Pi dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{E}\dot{H}^*]$$

и вещественным вектором, который указывает на присутствие колеблющейся составляющей вектора Пойнтинга

$$\Pi_{кол} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( [\dot{E}\dot{H}] e^{j2\omega t} \right)$$

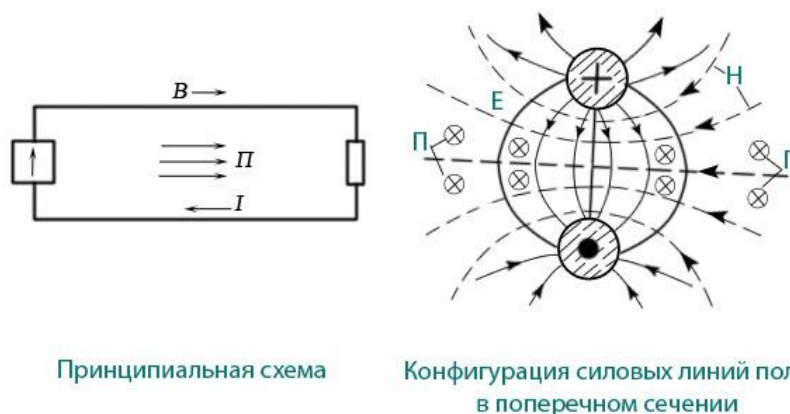
Необходимо не упускать из виду то, что среднее за период значение вектора  $\Pi_{кол}$  равно

нулю.

На основе уравнений Максвелла теоретическое рассмотрение и физический опыт позволяют утверждать, что термин «излучение» в узком смысле слова применим лишь к переменным во времени процессам в силу волнового характера распространения электромагнитного поля. С процессом переноса от источника электромагнитной энергии, к примеру, антенны, к любым другим (неважно к скольким) удаленным точкам пространства ассоциация вектора Пойнтинга верна не всегда. Однако правильно описать процесс в системах с неизменными во времени полями передачи электромагнитной энергии нам позволяет введенный вектор Пойнтинга.

В силу примера ниже изображен эскиз двухпроводной линии передачи, в которой от источника постоянной э.д.с. передается энергия к резистивной нагрузке. Также мы можем видеть изображенный характер силовых линий полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Далее из рисунка следует, что построен может быть в каждой точке пространства отличный от нуля вектор Пойнтинга  $\mathbf{\Pi}$ , ориентированный вдоль оси линии от генератора к нагрузке.

### Передача энергии электромагнитного поля от генератора к нагрузке

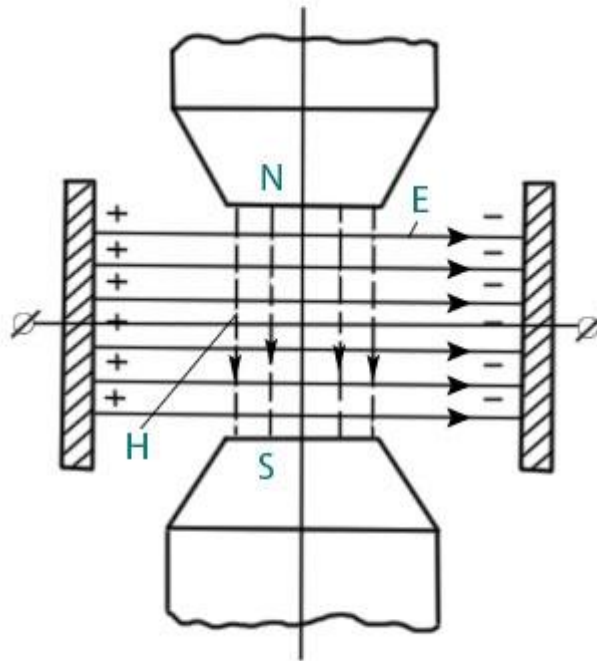


Если же по поперечной плоскости в бесконечных пределах проинтегрировать вектор Пойнтинга, то в конечном итоге будет получена величина переносимой мощности, выражаемая как произведение напряжения на нагрузке и протекающего тока в электротехнических терминах.

Заключение возможно будет казаться несколько неожиданным: энергия в данной системе с точки зрения электродинамики переносится не токами, протекающими в проводниках, а в окружающем пространстве электромагнитным полем. Наличие токов и проводников выступает в них как необходимое условие существования полей нужной конфигурации.

Рассмотрим с целью другого интересного примера систему, состоящую из заряженного конденсатора и постоянного магнита, сориентированных сравнительно друг друга так, как показано на изображении:

## Система из заряженного конденсатора и постоянного магнита



Поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  тут не параллельны друг другу, это позволит ввести отличный от нуля вектор Пойнтинга  $\mathbf{\Pi} = [\mathbf{E}\mathbf{H}]$  в каждой точке пространства. От того, что рассматриваемые поля статические и токи проводимости не протекают в системе, в соответствии с уравнениями Максвелла

$$\text{rot}\mathbf{H} = 0$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = 0$$

Откуда

$$\text{div}\mathbf{\Pi} = 0$$

Тем самым в предоставленной физической задаче векторное поле  $\mathbf{\Pi}$  не обладает источниками; его поток через любую замкнутую поверхность равен нулю, это говорит о постоянстве полной энергии электромагнитного поля во времени, внутри произвольной замкнутой поверхности.

В конце надлежит указать, что иногда вводится комплексный вектор Пойнтинга

$$\dot{\mathbf{\Pi}} = \frac{1}{2} [\dot{\mathbf{E}}\mathbf{H}^*]$$

при анализе гармонически изменяющихся во времени электромагнитных волновых полей

обладающий тем свойством, что

$$P_{cp} = \operatorname{Re} \dot{\Pi}$$

Видна аналогия между мощностью гармонического колебательного процесса известной из электротехники и комплексным вектором Пойнтинга. Как правило, мнимый вектор Пойнтинга обычно связывают с реактивной энергией электромагнитного поля.